

<http://optimos2.diinf.usach.cl/swc/>

Bienvenidos al Sitio Web de Conocimiento sobre el Problema del Camino Mínimo

En este sitio de difusión de conocimiento científico y tecnológico el visitante se informa y puede resolver instancias reales del "Problema del Camino Mínimo" (PCM), pues se pone a disposición una potente calculadora científica como aplicación web.

El público objetivo considera académicos e investigadores en Optimización, estudiantes universitarios y de Enseñanza Media (secundaria). También está orientado a las pequeñas y medianas empresas, principalmente de Chile, en las que se puedan utilizar aplicaciones del PCM. Además este material es una interesante fuente para investigación periodística científica.

El Problema del Camino Mínimo, conocido también como "Shortest Path Problem" (SPP), es uno de los clásicos de la investigación de operaciones y por décadas es material de trabajo sobre modelos de "optimización de redes", que es un tipo especial de modelo de programación lineal, pero que provee un lenguaje más intuitivo que hablar de ecuaciones, funciones objetivo y restricciones.

La importancia del Problema del Camino Mínimo radica en la amplitud del espectro de problemas que se puede abordar a través de los modelos que lo solucionan y porque lo vemos muy frecuentemente en procesos de transporte y comunicaciones, así como también en circuitos integrados para computadores, sistemas mecánicos e hidráulicos.

Teoría - **Presentación del Problema** (Parte I)

El Problema del Camino Mínimo (PCM) consiste en encontrar la ruta más corta en términos de tiempo, dinero, distancia, etc. (cualquier índice de conveniencia), entre un punto y otro dentro de una red. Ésta puede ser una red computacional, el tramado de calles, el esquema de un proyecto, etc. Un problema típico de redes es encontrar alguna ruta desde la ciudad A (el origen) hasta la ciudad B (el destino), donde se sabe que existen trayectorias alternativas en diferentes puntos intermedios. El costo del recorrido va a depender de la ruta escogida, es decir, se busca minimizar la suma de los tramos que conducen de A hasta B. Una red puede ser representada conceptualmente a través de un grafo, que es una herramienta matemática que permite un modelamiento y analogía directa. Un grafo se define como un conjunto de nodos (puntos, vértices) y arcos (líneas, aristas), en que los nodos pueden representar terminales computacionales, uniones de tuberías, etc. y los arcos pueden representar cables de red, cañerías, etc. a cada arco se asocia un costo que puede representar el largo del cable o la capacidad de la cañería. En la **Ilustración 1** vemos la analogía de un grafo con una red de caminos.

Teoría - **Presentación del Problema** (Parte II)

Para una red de pocos nodos, o no muy densa, se puede encontrar solución probando todas las alternativas, es decir, usando "fuerza bruta", pero esto no es muy práctico. En los casos reales el número de rutas es demasiado grande para permitir un completo análisis de todas ellas. Es posible imaginar lo complejo que sería estimar la ruta óptima entre un par de puntos de una ciudad como Santiago de Chile o New York al hacer la analogía con la ilustración 2.

Teoría - Trascendencia del Problema

Los problemas de Camino Mínimo están en la columna vertebral de la optimización del flujo en redes, y motivan el estudio de si a implementadores de código y investigadores, por varias razones según sugieren Ahuja, Magnantin y Orlin [1].

- Aparecen frecuentemente en la práctica en una amplia variedad de aplicaciones en que se desea enviar cosas entre dos puestos tan rápida, barata o confiablemente como sea posible.
- Son fáciles de resolver con eficiencia.
- Siendo los modelos de red más simples logran capturar muchos de los más sobresalientes ingredientes centrales de los flujos en redes y una referencia y sirven como una base para estudiar modelos más complejos.
- Aparecen frecuentemente como subproblemas al resolver muchos problemas combinatorios y de optimización de redes.
- El estudio de problemas de caminos mínimos es un punto de partida para introducir muchas ideas clave sobre flujo en redes, como las estructuras de datos que suelen usarse, entre las que hallamos por ejemplo a los grafos.

El mundo es cada vez más rápido, se aprecia lo instantáneo, se quiere el óptimo. Cualquier solución a un problema de optimización es valioso per se.

Generalmente los problemas prácticos que requieren del SPP aparecen en las industrias de telecomunicaciones y transporte cuando se quiere enviar un mensaje o vehículo entre dos emplazamientos geográficos, buscando reducir tiempo o dinero invertido, pero son muchas las aplicaciones reales como por ejemplo.

- En empresas de transporte y telecomunicaciones.
- Desarrollo de circuitos integrados para computadores.
- Sistemas mecánicos e hidráulicos.
- La administración de proyectos.
- El planeamiento de reposición de inventarios.
- Secuenciación de ADN.
- Aproximación de funciones matemáticas.
- Distribución de costos de inspección entre etapas de líneas de producción.
- Asignación horarios de trabajo a operadores telefónicos y similares.
- El problema del sistema de inecuaciones de diferencias (System of Difference constraints).
- El clásico problema de la mochila que consiste en decidir qué cosas llevar en un viaje cuando hay capacidad de carga limitada y se requiere la más larga supervivencia posible.
- La planificación del tráfico urbano, etc.

Tomando el ejemplo del tráfico urbano, en la práctica, los modelos que los urbanizadores usan para calcular patrones de flujo de tráfico son problemas de optimización no lineal compleja o modelos de equilibrio complejo que ellos construyen sobre el supuesto de que los usuarios del sistema se comportarán viajando a través de las rutas más cortas entre sus salidas y destinos, con respecto a la congestión de tráfico en un momento dado. Así es como la mayoría de las implementaciones para encontrar patrones de tráfico urbano resuelven una

gran cantidad de problemas de camino mínimo como subproblemas, en efecto, hay una instancia de PCM a resolver para cada par de origen y destino posible en la red, este sería un problema combinatorio.

Teoría - Definición Formal del Problema del Camino Mínimo

Sea un grafo $G(N, A)$ en el cual a cada arco (i, j) se le asigna un valor numérico d_{ij} , llamado longitud o costo. La longitud L_{ij} , de un camino P_{ij} , es la suma de las longitudes de todos los arcos que lo componen como se ilustra en la **Relación 1**:

El problema del camino mínimo consiste en determinar el camino de menor longitud entre un par de nodos. Sea K_{ij} el conjunto de caminos existentes entre el par de nodos i y j , entonces el costo del camino mínimo L^* entre estos nodos es como se aprecia en la **Relación 2**:

En otras palabras se busca minimizar la suma de los tramos que conducen de un punto (nodo) a otro y que juntos conforman una ruta o camino, la distancia propiamente dicha se llama costo mínimo (L^*) y el itinerario se llama camino mínimo (aquel P_{ij} que satisface L^*).

Teoría - Algoritmos Solución

En la literatura sobre algoritmos de flujo en redes se halla comúnmente una clasificación de las creaciones algorítmicas para resolver el Problema del Camino Mínimo que separa el universo de soluciones en dos grandes familias. Comparten que son de tipo iterativo y asignan etiquetas de distancias tentativas para los nodos encada paso, pero la implementación varía en como cada uno de los tipos algoritmos actualizan las etiqueta de distancia en cada paso y como convergen hacia los valores de las distancias de la ruta más corta.

1. Label Setting:

- Tienen como algoritmo básico al de [Dijkstra](#), teniendo entre sus variantes a los algoritmos "heap", "reverse", bidireccional, "radix heap", etc. Otro algoritmo particular en esta familia es el [Ford-Moore-Bellman](#).
- Designa una etiqueta como permanente (óptima) en cada iteración.
- Resuelve problemas acíclicos y con grafos con arcos con largos no negativos.

2. Label Correcting:

- Tiene algoritmos como el [Label-Correcting](#) genérico, el modificado, el "todos con todos" y el [Floyd-Warshall](#).
- Considera todas las etiquetas como temporales hasta el paso final.
- Es más general y resuelve todo tipo de problemas.

Soluciones Heurísticas

El Problema del Camino Mínimo ha sido ampliamente estudiado en su versión determinística, pero los avances en el campo de la optimización estocástica han motivado a revisar los problemas de redes clásicos con relajadas consideraciones sobre el determinismo de varios parámetros. Muchas de las investigaciones sobre el SPP a-priori estocástico han enfrentado variaciones dinámicas del problema. Un algoritmo heurístico eficiente es de autoría de Fu & Rilett (1998) y uno NP óptimo es presentado en Hall (1986) y en Miller-Hooks & Mahmassani (1999).

