

Consideremos el siguiente modelo de lago como sistema completamente mezclado:

$$V \frac{dc}{dt} = Q \cdot c_{in} + W_F(t) - Q c - k V c,$$

donde la concentración c en el instante $t = 0$ es igual a c_0 (es decir, $c(0) = c_0$).

1. Escribalo en la forma

$$c' + \lambda c = S(t)/V, \quad c(0) = c_0,$$

y halle su única solución si Q , c_{in} y W_F son constantes.

2. Supongamos ahora que el volumen V del lago es igual a 50000 m^3 ; los caudales de entrada y salida Q_{in} y Q_{out} son iguales a $7500 \text{ m}^3/\text{d}$; la velocidad de descomposición $k = 0.319 \text{ d}^{-1}$; la carga W_F debida a una factoría igual a 50 kg/d ; $c_{in} = 10 \text{ mg/l}$, y $c_0 = 0$.
 - (a) Halle la solución exacta del problema. Representela gráficamente. Calcule la concentración máxima y la concentración a largo plazo.
 - (b) Fije un tamaño de paso de la partición y utilice el método de Runge-Kutta clásico de cuatro evaluaciones para aproximar la solución del problema y estimar la evolución de la concentración de contaminante en los próximos 10 años. Represente la solución numérica obtenida.
 - (c) Represente conjuntamente las soluciones exacta y numérica obtenidas. ¿Es una buena aproximación? De no serlo, disminuya el paso utilizado en el método numérico y repita el procedimiento pedido hasta conseguir un error inferior a 10^{-2} .
3. Suponga ahora que $V = 50000 \text{ m}^3$, $Q_{in} = Q_{out} = 7500 \text{ m}^3/\text{d}$, $k = 0.319 \text{ d}^{-1}$, $W_F = 50 \text{ kg/d}$, $c_0 = 0$, y que entra contaminante en el lago durante un año y medio según se indica a continuación:

$$c_{in}(t) = \begin{cases} 10 \text{ mg/l}, & 0 \leq t \leq 1.5 \times 365 \text{ d}, \\ 0, & t > 1.5 \times 365 \text{ d}. \end{cases}$$

Siga los pasos indicados en el apartado 2 para resolver exacta y numéricamente el correspondiente problema de valor inicial.